

基于奇异值分解的方法求解目标内谐振时的散射截面

孙玉发,徐善驾

(中国科学技术大学电子工程与信息科学系,安徽合肥 230027)

摘 要: 表面积分方程已被广泛地用来分析电磁散射问题,但在离散的内谐振频率点上,用矩量法求解积分方程将得到错误的结果.本文基于电场积分方程,应用奇异值分解找出谐振模电流,并采用正交化方法将其舍去,从而得到非谐振模电流的分布.文中计算了一无限长理想导体圆柱内谐振时的散射截面,所得结果与解析解一致,并对一无限长理想导体三角柱的前向散射截面进行了计算,结果表明本文方法是有效和准确的.

关键词: 奇异值分解;矩量法;内谐振;散射截面

中图分类号: TN011 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2001) 07-0958-03

Calculation of Scattering Cross Section at the Interior Resonance Based on the Singular Value Decomposition

SUN Yu-fa, XU Shan-jia

(Dept. of Electronic Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei, Anhui 230027, China)

Abstract: Surface integral equation formulations have been widely used for the analysis of electromagnetic scattering problems, however, the wrong calculated results will be given using the method of moments at the discrete resonant frequencies. In this paper, based on the electric field integral equation, the singular value decomposition technique is used for finding out the current of the resonant mode, and the current distribution of the non-resonant mode can be obtained by filtering out the resonant mode current using the orthogonalized method. The scattering cross section is calculated for an infinitely long, perfectly conducting circular cylinder at the interior resonance, and the obtained results are in good agreement with the analytical results. The forward scattering cross section of an infinite isosceles triangular cylinder is also calculated. It is shown that the present method is valid and accurate.

Key words: singular value decomposition; method of moments; interior resonance; scattering cross section

1 引言

当入射波频率与散射体外形相同的空腔(腔表面为理想导体,腔内填充外部媒质)谐振频率相同时就会发生谐振,称为内谐振.在此频率的入射波激励下散射体表面将产生谐振模电流和非谐振模电流,谐振模电流不产生散射场,只有非谐振模电流才产生散射场.在谐振频率点上,用于分析电磁散射问题的电场积分方程(EFIE)和磁场积分方程(MFIE)都不能给出正确解,因为此时若利用矩量法进行数值求解,系数矩阵成为变态,即使能由变态矩阵方程求出散射体表面的电流分布,所得的结果也是不正确的,因为此电流为谐振模电流和非谐振模电流两部分之和.为此,人们提出了一些消除内谐振的方法,诸如:组合场积分方程^[1](CFIE)法、组合源积分方程^[2](CSIE)法、扩展的电磁场积分方程^[3]法、最小范数解^[4]等,每种方法都有其缺点和适用范围,如CFIE法虽然保证了解的唯一性,但(1)需要同时计算EFIE和MFIE的阻抗矩阵,(2)任意常数 α 的选择没有确定的规范,(3)不适用于计算由空腔

和薄平板构成的一类散射体;扩展的电磁场积分方程法在应用矩量法求解方程时,与使用EFIE和MFIE相比,矩阵元素计算复杂,需要的存储单元多.本文从EFIE出发,利用奇异值分解找出矩阵方程中系数矩阵的最小奇异值及其对应的特征向量(谐振模电流),并将谐振模电流滤除掉,从而得到散射体表面上产生散射场的电流分布.应用这种方法我们对无限长理想导体圆柱和三角柱内谐振时的电流分布和散射截面进行了计算,以证实本文方法的正确性和有效性.

2 基本理论和方法^[5,6]

EFIE不仅形式简单,而且理论上在谐振频率点的散射场可由其唯一确定,同时它还适合于分析由腔体和薄平板构成的一类散射问题,所以本文选择EFIE来分析内谐振时目标的散射问题.

用矩量法可将EFIE化成如下形式的矩阵方程:

$$ZJ_0 = E \quad (1)$$

收稿日期:2000-04-11;修回日期:2000-11-05

基金项目:国家自然科学基金(No. 69971001);教育部年度重点科研基金(No. 00179)

式中 Z 为 $N \times N$ 维阻抗矩阵, 如果选择相同的基函数和检验函数, 则该阻抗矩阵为复对称矩阵^[7]. J_0 、 E 为 N 维列向量, 分别代表待求电流和入射场. 由于 Z 不是 Hermite 矩阵, 其特征向量不 orthogonal, 因而不能用一个酉矩阵将其对角线化, 但用两个 $N \times N$ 维的酉矩阵 U 和 V 可将其对角线化, 即

$$U^H Z V = D \tag{2}$$

式中上标 H 表示 Hermite 共轭, D 为一个对角线矩阵, 其对角线元素称为 Z 的奇异值, 用 $\sigma_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 表示, 选择 U 和 V 可使 σ_n 为非负实数, 沿对角线按递减顺序排列, 即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$.

根据酉矩阵的性质, 由式(2)可得 Z 的奇异值分解

$$Z = U D V^H \tag{3}$$

式中 U 的列向量为 $Z Z^H$ 的标准正交化特征向量, V 的列向量为 $Z^H Z$ 的标准正交化特征向量. 且

$$Z Z^H = U D V^H V D^H U^H = U D^2 U^H \tag{4}$$

$$Z^H Z = V D^H U^H U D V^H = V D^2 V^H \tag{5}$$

可见 $Z Z^H$ 和 $Z^H Z$ 是 Hermite 矩阵, 它们的特征值为 Z 的奇异值的平方, 即 σ_n^2 .

根据奇异值分解, 式(1)可写成

$$J_0 = V D^{-1} U^H E \tag{6}$$

当 D^{-1} 不存在时, 上式就没有意义, 然而由于矩量法存在截断误差和数值计算引起的数值误差, 实际上 Z 不会有精确的零奇异值, 但是在内谐振频率点, Z 的最小奇异值 σ_N 很小, 这意味着 D^{-1} 中的相应元素 σ_N^{-1} 很大, 而 $U^H E$ 的第 N 个元素很小, 所以 σ_N 或 $U^H E$ 的第 N 个元素的一个小误差将会引起 J_0 的很大误差. 因此数值计算时必需进行修正.

大家知道, 事实上 V 的每一个列向量是电流的一个正交模, V 的第 N 列就是谐振模电流, 所以当 σ_N 小于某一个值时, 用零代替 σ_N^{-1} , 可使 J_0 与 V 的第 N 列正交, 即使电流与谐振模电流正交. 正是这种正交化处理使谐振模电流得以去除, 从而得到非谐振模电流的分布, 进而确定目标在内谐振点上的散射截面.

3 数值计算和结果

为了验证本文方法的正确性, 我们首先讨论 TM 极化平面波垂直入射到无限长理想导体圆柱上的散射问题. 相应的电场积分方程为:

$$\frac{k}{4} \int_C J_z(\mathbf{r}') H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) dl = E_z^i(\mathbf{r}), \text{ 在 } C \text{ 上} \tag{7}$$

式中 C 为圆柱截面的周线, J_z 为导体表面上的电流密度, E_z^i 为入射电场, $H_0^{(2)}$ 为第二类零阶 Hankel 函数, \mathbf{r} 和 \mathbf{r}' 分别表示场点和源点的位置矢量, k 、 λ 分别为自由空间波数和波阻抗.

应用矩量法^[8]可将式(7)的 EFIE 化成式(1)所示的矩阵方程. 计算中我们选择脉冲函数作为基函数, 函数作为检验函数, 圆柱的圆周被等分为 128 段, 频率为无限长圆柱腔 TM₂₂ 模的谐振频率 $ka = 8.417$. 由于矩量法存在截断误差和数值误差, 对阻抗矩阵 Z 进行奇异值分解, 我们发现: 在该谐

振频率点上, 矩阵 Z 的 σ_N 不是最小, 而在 $ka = 8.4291317$ 时才达到最小, 即发生数值谐振, 此时 Z 的奇异值为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 592.9430; & \sigma_{126} &= 31.2732; \\ \sigma_{127} &= 0.0321; & \sigma_{128} &= 0.0321. \end{aligned} \tag{8}$$

可见 σ_{127} 、 σ_{128} 为最小奇异值, 对应的特征向量为谐振模电流, 令 σ_{127}^{-1} 、 σ_{128}^{-1} 等于零, 使谐振模电流与表面电流正交.

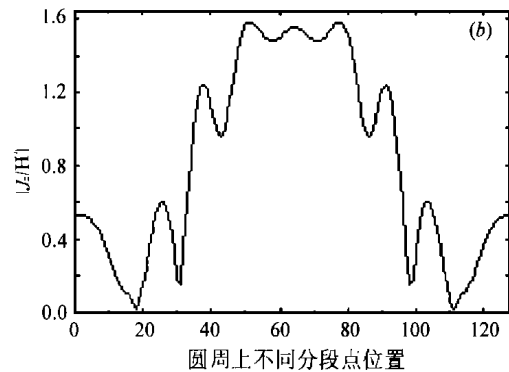
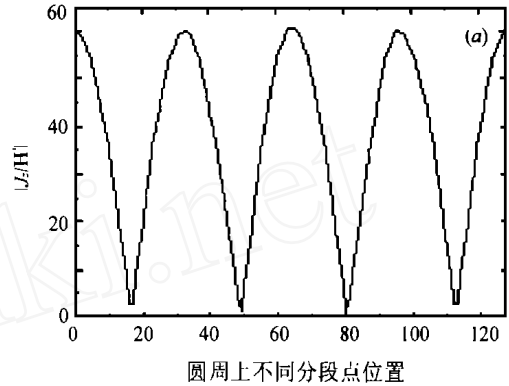


图 1 (a) 谐振时圆柱上的电流分布; (b) 修正后圆柱上的电流分布

图 1(a)、(b) 分别表示内谐振时圆柱面上未修正和修正后的电流分布, 电流密度的振幅已对入射磁场归一化. 由图 1 可见: 产生散射场的电流已完全被谐振电流遮掩. 这一事实证明, 若不对这个电流分布进行修正, 不可能求得正确的目标的散射截面. 图 2 表示根据圆柱面上修正后的电流分布计算得到的双站散射图, 并与解析解计算公式^[9]

$$= \frac{4}{k} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} e^{jn} \right|^2 \tag{9}$$

得到的结果进行了比较, 结果表明两者吻合良好.

另外, 我们还对无限长理想导体三角柱 (见图 3) 的前向散射截面进行了计算. 三角柱的横截面周界被等分为 180 段, 计算频率为无限长三角柱腔 TM₁₂ 模的谐振频率 $a/\lambda = \sqrt{5}/2 = 1.1180$, 计算表明实际的数值谐振频率为 $a/\lambda = 1.1197$, 此时 Z 的奇异值为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 539.1153; & \sigma_{179} &= 9.1339; \\ \sigma_{180} &= 0.0030 \end{aligned} \tag{10}$$

在数值谐振频率点附近, a/λ 每隔 0.000005 计算一次三角柱的前向散射截面, 图 3 给出了三角柱前向散射截面与 a/λ 间的关系, 由图可见: (1) 在数值谐振频率点及其附近, 由于谐振

模电流的存在,由表面总电流计算出的前向散射截面比实际值大。(2)离开数值谐振频率点一段间隔后,不需对表面电流进行修正即可得到正确结果。

4 结论

本文给出了一种基于奇异值分解来求解目标内谐振时散射截面的方法。文中将奇异值分解技术应用到基于 EFIE 的矩量法中,从而确定系数矩阵中的最小奇异值及其对应的谐振模电流,然后利用正交化处理将不产生散射场的谐振模电流滤除掉,以得到散射体表面上产生散射场的电流分布,消除了内谐振的影响后,使 EFIE 在所有频率点上的解都是正确的。从文中两计算实例可以看出:

- (1) 由于只使用了 EFIE,不需 MFIE,所以与 CFIE 法、扩展的电磁场积分方程法相比,本文中矩阵元素的计算时间和存储单元均要少得多;
- (2) 由于矩量法存在截断误差和数值误差,数值谐振频率偏离了实际的谐振频率,所以计算时需要找到数值谐振频率点,否则将造成最后的计算误差;
- (3) 在数值谐振频率点及其附近,都需要进行数值修正,才能得到正确的结果;
- (4) 基于修正电流得到的散射截面对谐振不敏感。

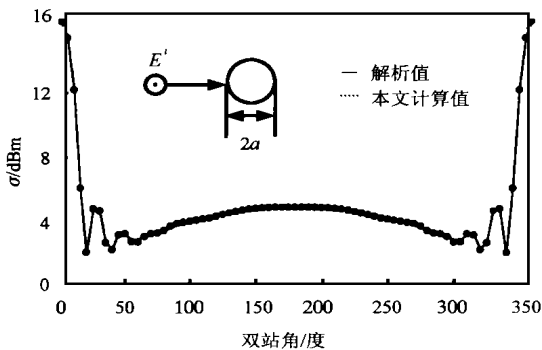


图 2 圆柱的双站散射图

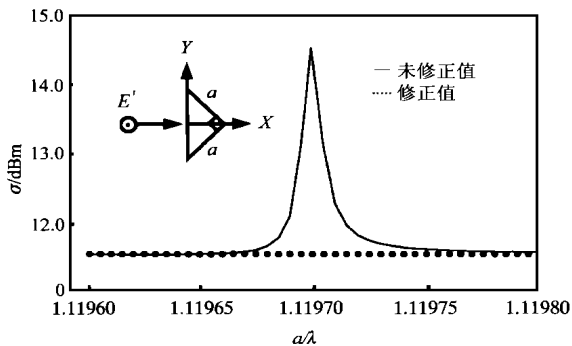


图 3 三角柱的前向散射截面

参考文献:

- [1] J R Mautz, R F Harrington. H-field, E-field, and combined field solutions for conducting body of revolution [J]. AEU, 1978, 32: 157 - 164.
- [2] J R Mautz, R F Harrington. A combined-source solution for radiation and scattering from a perfectly conducting body [J]. IEEE Trans. ,1979, AP-27:445 - 454.
- [3] A D Yaghjian. Augmented electric- and magnetic-field integral equations [J]. Radio science, 1981, 16:987 - 1001.
- [4] T K Sarkar, S M Rao. A simple technique for solving E-field integral equations for conducting bodies at internal resonances [J]. IEEE Trans. ,1982, AP-30:1250 - 1257.
- [5] F X Canning. Singular value decomposition of integral equations of EM and applications to the cavity resonance problem [J]. IEEE Trans. ,1989, AP-37:1156 - 1163.
- [6] 王松桂,杨振海. 广义逆矩阵及其应用 [M]. 北京工业大学出版社,1996:27 - 61.
- [7] F X Canning. Direct solution of the EFIE with half the computation [J]. IEEE Trans. ,1991, AP-39:118 - 119.
- [8] R F Harrington. Field computation by moment methods [M]. New York:Macmillan,1968.
- [9] 王一平,等. 工程电动力学 [M]. 西安:西北电讯工程学院出版社,1985:297-302.

作者简介:



孙玉发 男. 1966 年出生于安徽省全椒县, 1991 年获山东大学无线电物理专业硕士学位, 现为安徽大学电子工程与信息科学系副教授, 中国科学技术大学博士生. 主要从事微带天线、电磁散射、电磁场数值计算方法的研究工作。



徐善驾 男. 1939 年出生于浙江宁波, 中国科学技术大学教授, 博士生导师, IEEE 高级会员, 纽约科学院院士. 长期从事微波、毫米波和光波理论和技术方面的教学和科研工作, 曾获中科院自然科学一等奖, 光华科技基金一等奖、中科院重大科研成果二、三等奖, 在国内外发表论文 310 余篇。